Matematikai statisztika

egyetemi jegyzet

Meskó Balázs

2011

Előszó

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **4**
1.1. A matematikai statisztika céljai 4
1.2. Alapfogalmak 4

2. Fontos eloszlások **5**
2.1. χ^2 eloszlás 5
2.2. t_p eloszlás 5
2.3. $F_{k,l}$ eloszlás 5

3. Becsléselmélet **6**
3.1. A várható érték és szórás becslése 6
3.2. Pontbecslés 6
3.2.1. Példafeladatok 9
3.3. Intervallumbecslés 9
3.3.1. Példafeladatok 10

4. Hipotézis-vizsgálat **12**
4.1. Egymintás u-próba 12
4.2. Kétmintás u-próba 13
4.3. Egymintás t-próba (Student-próba) 13
4.4. Kétmintás t-próba (Student-próba) 14
4.5. F-próba 14
4.6. χ^2-próba (Pearson-féle χ^2-próba) 15
4.7. Példafeladatok 15

5. Táblázatok **20**
5.1. Φ táblázat 20
5.2. t táblázat 20
5.3. u táblázat 21
5.4. F táblázat 22
5.5. χ^2 táblázat 22

1. Bevezetés

1.1. A matematikai statisztika céljai

1.2. Alapfogalmak

2. Fontos eloszlások

2.1. χ^2 eloszlás

2.2. t_p eloszlás

2.3. $F_{k,l}$ eloszlás

3. Becsléselmélet

3.1. A várható érték és szórás becslése

Jelöljük az alapeloszlás (azaz a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ minta elemek közös eloszlásának) várható értékét m-vel, a szórásnégyzetét pedig σ^2-tel. A mintaátlag várható értéke megegyezik az alapeloszlás várható értékével:

$$E(\overline{\xi}_n) = \frac{1}{n}(E(\xi_1) + \dots + E(\xi_n)) = m$$

Ezért azt mondjuk, hogy a mintaátlag a várható érték **torzítatlan becslése**. Továbbá a

$$D^2(\overline{\xi}_n) = \frac{1}{n^2}(D^2(\xi_1) + \dots + D^2(\xi_n)) = \frac{\sigma^2}{n} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0$$

Tehát a mintaközép szórása tart a nullához, ha az elemek száma tart a végtelenhez. Ez lényegében megegyezik a nagy számok erős törvényével, mely szerint $P(\lim_{n\to\infty} \overline{\xi}_n = m) = 1$, tehát a mintaelemek számát növelve, egyre közelebb kerül a mintaátlag a valódi várható értékhez. Ezt úgy mondjuk másképpen, hogy a mintaátlag **erősen konzisztens becslése** a várható értéknek.

A tapasztalati szórásnégyzet várható értéke:

$$E(S_n^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(\xi_i - \overline{\xi}_n)^2 = \frac{1}{n} D^2(\xi_i - \overline{\xi}_n) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

Ezért a tapasztalati szórásnégyzet nem torzítatlan becslése a tényleges szórásnégyzetnek. Ezért vezetjük be a **korrigált tapasztali szósánégyzetet**:

$$S_n^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \overline{\xi}_n)^2 = \frac{n}{n-1} S_n^2$$

Ez már torzítatlan becslése a tényleges szórásnégyzetnek, hiszen $E(S_n^{*2}) = \sigma^2$. Azt is be lehet látni, hogy a korrigált tapasztalati szórásnégyzet erősen konzisztens becslése a tényleges szórásnégyzetnek, azaz hogy $P(\lim_{n\to\infty} S_n^{*2} = \sigma^2) = 1$.

Összegezve, egy becslést akkor nevezünk torzítatlannak, ha a becslés várható értéke megegyezik a tényleges értékkel, erősen konzisztensnek pedig akkor ha a becslés határértékben ($n \to \infty$) megegyezik a tényleges értékkel.

3.2. Pontbecslés

Feltesszük, hogy az alapeloszlás, amelyből a minta származik, valamely paraméteresen megadott eloszláscsaládból való $\{F^{(\gamma)} : \gamma \in \Gamma \subset \mathbb{R}\}$. A feladat pontbecslés esetén az, hogy az ismeretlen γ paramétert megbecsüljük.

A **maximum likelihood módszer** szerint azzal a paraméterértékkel közelítünk, mely esetén legnagyobb a valószínűsége annak, hogy éppen az adott mintaelemet kapjuk.
Példák a módszerre:

Első példa (Poisson eloszlás)

Tegyük fel, hogy az alapeloszlás $\lambda > 0$ paraméterű Poisson eloszlás, ahol λ ismeretlen paraméter. Így $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ független valószínűségi változók, és

$$P_\lambda(\xi_i = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

A feladat a λ paraméter becslése a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ minta alapján. Jelölje $k_1, k_2, \ldots, k_n$ a megfigyelt értékeket. A definíció szerint a $\widehat{\lambda}_n$ maximum likelihood becslés az a szám, ahol a

$$L_n(k_1, k_2, \ldots, k_n; \lambda) := P_\lambda(\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2, \ldots, \xi_n = k_n)$$

likelihood függvénynek globális maximumhelye van. Mivel a valószínűségi változók függetlenek, ezért szorzatra bontható a függvény:

$$L_n(k_1, k_2, \ldots, k_n; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} P_\lambda(\xi_i = k_i) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda^{k_i}}{k_i!} e^{-\lambda} \right) = e^{-n\lambda} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{k_i}}{k_i!}$$

Az egyenlet tovább egyszerűsíthető, ha vesszük a logaritmusát. Ez a **log-likelihood függvény**:

$$\ln L_n(k_1, k_2, \ldots, k_n; \lambda) = -n\lambda + \sum_{i=1}^{n} k_i \ln \lambda - \sum_{i=1}^{n} \ln(k_i!)$$

Ennek keressük a globális maximumhelyét. Ehhez deriváljuk λ szerint a log-likelihood függvényt:

$$\frac{\partial \ln L_n(k_1, k_2, \ldots, k_n; \lambda)}{\partial \lambda} = -n + \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{\lambda} = 0$$

Ekkor az egyenlet egyetlen megoldása a $\lambda = \sum_{i=1}^{n} k_i / n$, és

$$\frac{\partial^2 \ln L_n(k_1, k_2, \ldots, k_n; \lambda)}{\partial^2 \lambda} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{\lambda^2} < 0$$

hacsak a megfigyelt értékek mindegyike nem 0. Tehát, ha létezik nem zérus megfigyelt érték, akkor a λ maximum likelihood becslése $\widehat{\lambda} = \overline{\xi}_n$

Második példa (Exponenciális eloszlás)

Legyen az alapeloszlás $\lambda > 0$ paraméterű exponenciális eloszlás, ahol λ ismeretlen paraméter, azaz $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ független valószínűségi változók, melyeknek a sűrűségfüggvénye

$$f_{\xi_i}^{(\lambda)}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geq 0 \\ 0, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

A feladat a λ paraméter becslése a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ minta alapján. Jelölje $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a megfigyelt értékeket. A definíció szerint a $\widehat{\lambda}_n$ maximum likelihood becslés az a szám, ahol a

$$L_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda) := P^{(\lambda)}_{\xi_1, \ldots, \xi_n}(x_1, \ldots, x_n)$$

likelihood függvénynek globális maximumhelye van. A valószínűségi változók függetlensége miatt

$$L_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} P^{(\lambda)}_{\xi_i}(x_i)$$

teljesül, valamint a logaritmus függvény monotonitása miatt elegendő megkeresni a log-likelihood függvény:

$$\ln L_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda) = n \log \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i$$

globális maximumhelyét. Mivel a

$$\frac{\partial \ln L_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda)}{\partial \lambda} = n \ln \lambda + \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i$$

egyenlet egyetlen megoldása $\lambda = n / \sum_{i=1}^{n} x_i$, és

$$\frac{\partial^2 \ln L_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda)}{\partial^2 \lambda} = -\frac{n}{\lambda^2} < 0,$$

ezért a maximum likelihood becslése $\widehat{\lambda}_n = 1/\overline{\xi}_n$.

Harmadik példa (Egyenletes eloszlás)

Legyen az alapeloszlás a $[0, a]$ intervallumon, ahol a az ismeretlen paraméter, azaz $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ független valószínűségi változók melyeknek sűrűségfüggvénye

$$f^{(a)}_{\xi_i}(x) = \begin{cases} 1/a, \text{ ha } x \in (0, a) \\ 0, \text{ ha } x \notin (0, a) \end{cases}$$

A feladat a becslése a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ minta alapján. Az a paraméter $\widehat{a}_n$ maximum likelihood becslése olyan szám, ahol az

$$L_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; a) := f^{(a)}_{\xi_1, \ldots, \xi_n}(x_1, \ldots, x_n)$$

likelihood függvénynek globális maximumhelye van. Nyilván

$$L_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; a) = \prod_{i=1}^{n} f^{(a)}_{\xi_i}(x_i)$$

a valószínűségi változók függetlensége miatt. Mivel $\max\limits_{1 \le i \le n} x_i \le a$, ezért a maximum likelihood becslés $\widehat{a}_n = \max\limits_{1 \le i \le n} \xi_i = \xi^*_n$.

3.2.1. Példafeladatok

$\boxed{1}$ Adjon meg maximum likelihood becslést a Poisson eloszlású valószínűségi változó λ paraméteré a következő minta alapján:

$$5 \quad 7 \quad 4 \quad 9 \quad 6$$

Ezután számítsa ki a valószínűségi változó $(2,6)$ intervallumba esésének valószínűségét!

Tekintsük a feladat általános megoldását, majd ez alapján adjuk meg az aktuális megoldást.

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{k_i}}{k_i!} e^{-\lambda} = e^{-n\lambda} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{k_i}}{k_i!}$$

$$\ln L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -n\lambda + \sum_{i=1}^{n} k_i \ln \lambda - \sum_{i=1}^{n} \ln(k_i!)$$

A log-likeliood függvény globális maximumpontját keressük. Ehhez meg kell keresnünk a függvény szélsőértékeit. Ehhez deriváljunk λ szerint:

$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial \lambda} = -n + \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{\lambda} = 0$$

Az egyenlet egyetlen megoldása így $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{n}$, amely pontosan a mintaközép. Mivel a második derivált értéke negatív, ezért biztosan ez a globális maximumpont. Jelen esetben ez:

$$\lambda = \frac{5+7+4+9+6}{5} = 6,2$$

A $(2,6)$ intervallumba esés valószínűsége:

$$P(2 < x < 6) = F(6) - F(2)$$

A $\lambda = 6,2$ becslést felhasználva:

$$P(2 < x < 6) = \frac{6,2^6}{6!} e^{-6,2} - \frac{6,2^2}{2!} e^{-6,2} = 0,1601$$

3.3. Intervallumbecslés

Feltesszük, hogy az alapeloszlás, amelyből a minta származik, valamely paraméteresen megadott eloszláscsaládból való $\{F^{(\gamma)} : \gamma \in \Gamma \subset \mathbb{R}\}$. A feladat intervallumbecslés esetén az, hogy az előre megadott α valószínűséghez (szignifikancia szinthez) olyan $S(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ és $T(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n)$ statisztikákat kell találnunk, mely esetén

$$P\left(S(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n) \le \gamma \le t(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)\right) = 1-\alpha$$

teljesül, azaz az intervallumba esés valószínűsége $1-\alpha$.

Ekkor azt mondjuk, hogy a $[S(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n); T(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)]$ intervallum egy $1-\alpha$ megbízhatósági szintű konfidencia intervallum.

3.3.1. Példafeladatok

$\boxed{2}$ Szerkesszen 90%-os megbízhatósági szintű konfidencia intervallumot a normális eloszlású ξ valószínűségi változó *szórásnégyzetére* az alábbi minta alapján:

$$2,3 \quad 4,0 \quad 1,5 \quad 0,3 \quad 3,7$$

Legelőször számítsuk ki a minta szórásnégyzetét: $S_n^2 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2 = 1,3764$. Az nS_n^2/σ^2 érték egy $\chi^2_{n-1} = \chi^2_4$ eloszlású valószínűségi változó. Most választunk olyan $0 < c_1 < c_2$ számokat melyre az teljesül, hogy $P(\chi^2_4 < c_1) = P(\chi^2_4 > c_2) = 1-\alpha$. Ehhez csak a χ^2 függvény táblázatára van szükségünk.

$$c_1 = 9,49 \text{ (a táblázatban a szabadsági fok 4, és } P = 0,05)$$
$$c_2 = 0,71 \text{ (a táblázatban a szabadsági fok 4, és } P = 0,95)$$

Így a konfidencia intervallum a következő:

$$\left[\frac{nS_n^2}{c_1}; \frac{nS_n^2}{c_2}\right] = \left[\frac{5\cdot 1,3764}{9,49}; \frac{5\cdot 1,3764}{0,71}\right] = [0,7252; 9,6930]$$

$\boxed{3}$ Egy automata kávé granulátumot tölt üvegekbe $1g$ *szórással.* Az automata pontosságának ellenőrzésére 16 mérést végeztek:

$$50 \quad 56 \quad 54 \quad 57 \quad 54 \quad 55 \quad 55 \quad 55 \quad 57 \quad 55 \quad 56 \quad 57 \quad 56 \quad 54 \quad 54 \quad 55$$

Normális eloszlást feltételezve, határozza meg 95%-os megbízhatósággal a töltőtömeg *várható értékét!*

$$\overline{x} = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} x_i = 55 \qquad p = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$$

Ezekből az adatokból és az u eloszlás táblázatát felhasználva meg is adhatjuk a konfidencia intervallumot:

$$\left[\overline{x} - u_p\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x} + u_p\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[55 - 1,96\frac{1}{4}; 55 + 1,96\frac{1}{4}\right] = [54,51; 55,49]$$

$\boxed{4}$ Egy automata kávé granulátumot tölt üvegekbe. Az automata pontosságának ellenőrzésére 16 mérést végeztek:

50 56 54 57 54 55 55 55 57 55 56 57 56 54 54 55

Normális eloszlást feltételezve, határozza meg 95%-os megbízhatósággal a töltőtömeg *várható értékét!*

$$\overline{x} = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} x_i = 55 \qquad S^{2^*} = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{16}(x_i - \overline{x})^2 \qquad S^* = 1,7127 \qquad p = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$$

Ezekből az adatokból és a t eloszlás táblázatát felhasználva meg is adhatjuk a konfidencia intervallumot:

$$\left[\overline{x} - t_p^{15}\frac{s^*}{\sqrt{n}}; \overline{x} + t_p^{15}\frac{s^*}{\sqrt{n}}\right] = \left[55 - 2,131\frac{1,7127}{4}; 55 + 2,131\frac{1,7127}{4}\right] = [54,0919; 55,9081]$$

4. Hipotézis-vizsgálat

Bevezető itt

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">Valóság</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>H_0</td><td>H_1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Döntés</td><td>H_0</td><td>Helyes döntés</td><td>Elsőfajú hiba</td></tr>
<tr><td>H_1</td><td>Másodfajú hiba</td><td>Helyes döntés</td></tr>
</table>

4.1. Egymintás u-próba

Adott egy ξ normális eloszlású valószínűségi változó, melynek ismert a $D(\xi) = \sigma$ szórása. Egy $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ minta alapján szeretnénk kideríteni, hogy az $E(\xi)$ várható érték megegyezik-e m-mel egy adott $1-\alpha$ megbízhatósági szinten. Tehát a következő nullhipotézist vizsgáljuk:

$$H_0 : E(\xi) = m_0$$

A H_0 hipotézis fennállásakor a $\overline{\xi}$ mintaközép normális eloszlású valószínűségi változó m_0 várható értékkel, és $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ szórással. Így az

$$u = \frac{\overline{\xi} - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

statisztika már sztenderd normális eloszlású (ha a nullhipotézis igaz). Tetszőleges $\alpha \in]0;1[$ esetén megadható olyan u_α szám, hogy

$$P(-u_\alpha < u < u_\alpha) = 1 - \alpha$$

Tehát amennyiben H_0 igaz, nagy valószínűséggel bekövetkezik az $\{-u_\alpha < u < u_\alpha\}$ esemény (alacsony α esetén). A döntésünk attól függ hogy u milyen értéket vesz fel. Ha a nagy valószínűségű $\{-u_\alpha < u < u_\alpha\}$ esemény következik be, akkor megtartjuk a H_0 hipotézist, ellenkező esetben pedig elvetjük azt, és a H_1 ellenhipotézist választjuk.

A H_0 hipotézist az $H_1 : E(\xi) \neq m$ ellenhipotézissel szemben vizsgálva, $1-\alpha$ megbízhatósági szinten, a legjobb próbát az $u_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$ kritikus értékkel kapjuk, míg ha az ellenhipotézis $H_1 : E(\xi) > m$, akkor a legjobb próbát az $u_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha)$ kritikus értékkel kapjuk.

A próba tualjdonságai:

- Ha fennáll a H_0 hipotézis, akkor a döntésünk $1-\alpha$ valószínűséggel helyes
- Vagyis az elsőfajú hiba valószínűsége α
- A másodfajú hiba meghatározása nehezebb

4.2. Kétmintás u-próba

Adott két normális eloszlású valószínűségi változó, ξ és η, melyeknek ismert a szórásuk, $D(\xi) = \sigma_1$, $D(\eta) = \sigma_2$. A $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ és a $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ független minták alapján szeretnénk kideríteni, hogy a két valószínűségi változó várható értéke megegyezik-e. Tehát a hipotézisünk:

$$H_0 : E(\xi) = E(\eta)$$

A H_0 hipotézis fennálásakor a $\overline{\xi} - \overline{\eta}$ normális eloszlású, $E(\overline{\xi} - \overline{\eta}) = 0$ várható értékű, és

$$D^2(\overline{\xi} - \overline{\eta}) = D^2(\overline{\xi}) + D^2(-\overline{\eta}) = \frac{D^2(\xi)}{n} + \frac{D^2(\eta)}{m} = \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}$$

szórásnégyzetű valószínűségi változó. Így a H_0 hipotézis fennállása esetén a

$$u = \frac{\overline{\xi} - \overline{\eta}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}}$$

valószínűségi változó már sztenderd normális eloszlású.

A H_0 hipotézist az $H_1 : E(\xi) \neq E(\eta)$ ellenhipotézissel szemben vizsgálva, $1 - \alpha$ megbízhatósági szinten, a legjobb próbát az $u_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$ kritikus értékkel kapjuk. Tehát például 95%-os megbízhatósági szinten $u_\alpha = \Phi^{-1}(0,975) = 1,960$.

A $H_1 : E(\xi) > E(\eta)$ ellenhipotézissel szemben vizsgálva, pedig $1 - \alpha$ megbízhatósági szinten, a legjobb próbát az $u_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha)$ kritikus értékkel kapjuk. Tehát például 95%-os megbízhatósági szinten $u_\alpha = \Phi^{-1}(0,95) = 1,645$.

A próba úgy zajlik, hogy ha a megfigyelt $|u| < u_\alpha$, akkor elfogadjuk a H_0 hipotézist, ha $|u| \geq u_\alpha$, akkor pedig az alternatív hipotézist választjuk.

4.3. Egymintás t-próba (Student-próba)

Az u-próbát csak abban az esetben alkalmazhatjuk, ha ismert a ξ valószínűségi változó szórása, amely sajnos nem mindig áll rendelkezésre. Így kézenfekvő az a megoldás, hogy a pontos szórás helyett a korrigált tapasztalati szórással számoljunk.

A t-próba a következő:

Legyen ξ egy normális eloszlású valószínűségi változó, és $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ egy ξ-ra vett n elemű minta. Ekkor a

$$H_0 : E(\xi) = m_0$$

nullhipotézist a

$$t = \frac{\overline{\xi} - m_0}{\frac{s_n^*}{\sqrt{n}}}$$

statisztikával vizsgálhatjuk. A H_0 hipotézis teljesülése esetén a t statisztika egy $n-1$ paraméterű t-eloszlású valószínűségi változó. Így a $H_1 : E(\xi) \neq m_o$ ellenhipotézis esetén, ha

$$t < t_p^{n-1}, \text{ ahol } p = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

akkor $1-\alpha$ biztonsági szinten elfogadjuk a nullhipotézist, ellenkező esetben pedig elvetjük. Ha egyoldali ellenhipotézist fogalmazunk meg, akkor annyi a különbség, hogy $p = 1-\alpha$.

4.4. Kétmintás t-próba (Student-próba)

Adott két normális eloszlású valószínűségi változó, ξ és η azonos szórással (az azonosság adódhat elméleti megfontolásokból, vagy pl. F-próba alapján). A $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ és a $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ független minták alapján szeretnénk kideríteni, hogy a két valószínűségi változó várható értéke $1-\alpha$ megbízhatósági szinten megegyezik-e. Ha ismernénk a szórást, akkor használhatnánk a kétmintás u-próbát, azonban a valós feladatok nagy többségében sajnos ismeretlen. Tekintsük a

$$H_0 : E(\xi) = E(\eta)$$

nullhipotézist. Az elfogadhatóságát a

$$t = \frac{\xi - \eta}{\sqrt{(n-1)S_n^{*2} + (m-1)S_m^{*2}}} \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}$$

statisztika segítségével dönthetjük el. Ha a H_0 hipotézis igaz, akkor a t statisztika $n+m-2$ paraméterű t (Student) eloszlást követ. Az egymintás esethez hasonlóan, ha a $H_1 : E(\xi) \neq E(\eta)$ ellenhipotézist vesszük , akkor a $|t| \leq t_p^{n+m-2}$ $(p = 1 - \frac{\alpha}{2})$ vizsgálat eredménye szerint fogadjuk el, vagy vetjük el a nullhipotézist. Ha az állítás igaz, akkor megtartjuk, ha nem akkor elvetjük.

Ha a $H_1 : E(\xi) > E(\eta)$ egyoldali ellenhipotézist használjuk, akkor fogadjuk el a nullhipotézist, ha $t \leq t_p^{n+m-2}$ $(p = 1-\alpha)$.

4.5. F-próba

Adott két normális eloszlású valószínűségi változó, ξ és η. A $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ és a $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_m$ független minták alapján szeretnénk kideríteni, hogy a két valószínűségi változó szórása egyenlőnek tekinthető-e. Ezért vesszük a

$$F_{f_1,f_2} = \frac{S_n^{*2}}{S_m^{*2}}$$

statisztikát, mely a $H_0 : D(\xi) = D(\eta)$ hipotézis esetén $f_1 = n-1$ és $f_2 = m-1$ szabadsági fokú F-eloszlású valószínűségi változó.

A kritikus értékek kiszámítása során a következő eljárást alkalmazzuk:

Ha az alternatív hipotézis a $H_1 : D(\xi) > D(\eta)$ egyoldali ellenhipotézis, akkor $S_n^{*2} < S_m^{*2}$ esetben azonnal elutasítjuk az ellenhipotézist, míg ha $S_n^{*2} \geq S_m^{*2}$, akkor kiszámítjuk az $F_{f_1,f_2} = \frac{S_n^{*2}}{S_m^{*2}}$ statisztikát. Ha ekkor $F_{f_1,f_2} > F_{f_1,f_2}(\alpha)$, akkor elutasítjuk a nullhipotézist, ellenkező esetben pedig elfogadjuk. Az $F_{f_1,f_2}(\alpha)$ az $1-\alpha$ megbízhatósági szinthez tartozó kritikus érték.

4.6. χ^2-próba (Pearson-féle χ^2-próba)

4.7. Példafeladatok

$\boxed{5}$ Adott egy normális eloszlású valószínűségi változó – ξ, melynek szórása 2 és adott rá egy 8 elemű minta:

11.40 11.49 9.84 9.91 13.16 7.52 8.86 9.04

95%-os megbízhatósági szinten ellenőrízze a hipotézist a H_1 alternatív hipotézis ellenében!

$$H_0 : E(\xi) = 10$$

$$H_1 : E(\xi) \neq 10$$

A feladat megoldásához u-próbát fogunk alkalmazni.

$$\overline{\xi} = 10,159$$

$$u = \frac{\overline{\xi} - 10}{\frac{2}{\sqrt{8}}} = 0,2254$$

Ezután összehasonlítjuk a kiszámított értéket a táblázatból kiolvasott u_α értékkel:

$$|u| = 0,2254 < 1,645 = u_\alpha$$

Tehát a megadott megbízhatósági szinten elfogadjuk az eredeti feltevést, miszerint $E(\xi) = 10$.

6 Adott két normális eloszlású valószínűségi változó, ξ és η, melyeknek a szórásuk 2. Mindekettőre adott egy 6 elemű minta:

$\xi:$	9,32	10,00	8,36	7,27	10,58	7,88
$\eta:$	10,08	10,71	12,63	13,09	10,12	9,07

95%-os megbízhatósági szinten egyenlőnek tekinthető-e a két valószínűségi változó várható értéke?

A feladat megoldásához kétmintás u-próbát fogunk alkalmazni.

$$\overline{\xi} = 8,9061 \qquad \overline{\eta} = 11,106$$

$$D^2(\overline{\xi} - \overline{\eta}) = \frac{\sigma_\xi}{n} + \frac{\sigma_\eta}{m} = \frac{4}{6} + \frac{4}{6} = \frac{4}{3} \qquad u = \frac{\overline{\xi} - \overline{\eta}}{\sqrt{D^2(\overline{\xi} - \overline{\eta})}} = -1,9051$$

Ezután összehasonlítjuk a kiszámított értéket a táblázatból kiolvasott u_α értékkel:

$$|u| = 1,9051 < 1,960 = u_\alpha$$

Tehát elfogadjuk az eredeti feltevést, miszerint $E(\xi) = E(\eta)$.

7 Adott két normális eloszlású valószínűségi változó, ξ és η. ξ-re adott egy 9 elemű, és η-ra egy 8 elemű minta:

$\xi:$	7	8	9	10	8	9	7	8	7
$\eta:$	9	8	7	10	6	7	5	7	

95%-os megbízhatósági szinten egyenlőnek tekinthető-e a két valószínűségi változó szórása?

A feladat megoldásához F-próbát fogunk alkalmazni.

$$\overline{\xi} = 8,1111 \qquad S_\xi^{*2} = 1,0541$$

$$\overline{\eta} = 7,375 \qquad S_\eta^{*2} = 1,5980$$

Ezekből az adatokból elkészíthetjük az F-próba próbastatisztikáját, és összevethetjük az F eloszlás táblázatával.

$$F = \frac{S_\xi^{*2}}{S_\eta^{*2}} = 0,6596 < 3,7257 = F_{8,7}(0,05)$$

Mivel a próbastatisztika értéke kisebb, mint az $F_{8,7}$ eloszlás a megadott megbízhatósági szinten, ezért a két valószínűségi változó szórását megegyezőnek tekinthetjük.

$\boxed{8}$ Adott két valószínűségi valtozó, ξ és η. ξ-re adott egy 9 elemű, és η-ra egy 8 elemű minta:

$$\begin{array}{lccccccccc} \xi: & 7 & 8 & 9 & 10 & 8 & 9 & 7 & 8 & 7 \\ \eta: & 9 & 8 & 7 & 10 & 6 & 7 & 5 & 7 & \end{array}$$

95%-os megbízhatósági szinten egyenlőnek tekinthető-e a két valószínűségi változó szórása?

A feladat megoldásához F-próbát fogunk alkalmazni.

$$\overline{\xi} = 8,1111 \qquad S_{\xi}^{*2} = 1,0541$$

$$\overline{\eta} = 7,375 \qquad S_{\eta}^{*2} = 1,5980$$

Ezekből az adatokból elkészíthetjük az F-próba próbastatisztikáját, és összevethetjük az F eloszlás táblázatával.

$$F = \frac{S_{\xi}^{*2}}{S_{\eta}^{*2}} = 0,6596 < 3,7257 = F_{8,7}(0,05)$$

Mivel a próbastatisztika értéke kisebb, mint az $F_{8,7}$ eloszlás a megadott megbízhatósági szinten, ezért a két valószínűségi változó szórását megegyezőnek tekinthetjük.

$\boxed{9}$ Egy valószínűségi változóra vett mintát a következő módon csoportosítottuk:

intervallum	gyakoriság
$0-1$	40
$1-2$	40
$2-4$	40
$4-\infty$	26

95%-os megbízhatósági szinten ellenőrízze a következő hipotézist:

$$H_0 : f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ 0,4e^{-0,4x}, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

A sűrűségfüggvényből határozzuk meg integrálással az eloszlásfüggvényt. Mivel ez egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó, így ezt könnyedén megtehetjük:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ 1 - e^{-0,4x}, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

Az eloszlásfüggvény segítségével meg tudjuk állapítani, hogy mekkora az egyes intervallumokban esés valószínűsége:

intervallum	pontos valószínűség	megfigyelt valószínűség
$0-1$	$F(1)-F(0)=0,3297$	$40/146=0,2740$
$1-2$	$F(2)-F(1)=0,2210$	$40/146=0,2740$
$2-4$	$F(4)-F(2)=0,2027$	$40/146=0,2740$
$4-\infty$	$1-F(4)=0,2466$	$26/146=0,1781$

A kérdés most az, hogy a megfigyelt értékek alapján állíthatjuk-e, hogy a hipotézist nem kell elvetni. Erre χ^2 próbát fogunk alkalmazni, ugyanis ha igaz a nullhipotézis, akkor a teszt statisztika 3 szabadsági fokú χ^2 eloszlást követ.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \overset{?}{<} \chi_3^2$$

$$\chi^2 = 0,066475 < 7,82 = \chi_3^2$$

Mivel ez teljesült ezért a χ^2 próba alapján nem vetjük el a H_0 hipotézist.

Megjegyzés:

Ez nem jelenti azt hogy a H_0 biztosan igaz, csupán azt hogy ez a próba nem cáfolta meg.

10 Egy valószínűségi változóra vett mintát a következő módon csoportosítottuk:

intervallum	gyakoriság
$0-2$	24
$2-3$	11
$3-4$	18
$4-\infty$	22

99%-os megbízhatósági szinten ellenőrízze a következő hipotézist:

$$H_0 : f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ 0,3e^{-0,3x}, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

A sűrűségfüggvényből határozzuk meg integrálással az eloszlásfüggvényt. Mivel ez egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó, így ezt könnyedén megtehetjük:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ 1 - e^{-0,3x}, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

Az eloszlásfüggvény segítségével meg tudjuk állapítani, hogy mekkora az egyes intervallumokban esés valószínűsége:

intervallum	pontos valószínűség	megfigyelt valószínűség
$0-2$	$F(2)-F(0) = 0,4512$	$24/70 = 0,3429$
$2-3$	$F(3)-F(2) = 0,1422$	$11/70 = 0,1571$
$3-4$	$F(4)-F(3) = 0,1054$	$18/70 = 0,2571$
$4-\infty$	$1-F(4) = 0,3012$	$22/70 = 0,3143$

Ezután χ^2 próbát fogunk alkalmazni, ugyanis ha igaz a nullhipotézis, akkor a teszt statisztika 3 szabadsági fokú χ^2 eloszlást követ.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \overset{?}{<} \chi_3^2(\alpha)$$

$$\chi^2 = 0,2465 < 11,34 = \chi_3^2(0,01)$$

Mivel ez teljesült ezért a χ^2 próba alapján megtartjuk a H_0 hipotézist.

11

Adott egy érme, melyet egymás után feldobunk 286 alkalommal. A dobások eredménye 129-szer fej, és 157-szer írás lett. 90%-os megbízhatósági szinten döntsük el, hogy szabályos-e a pénzérme. Ezt a χ^2 próba segítségével dönthetjük el, ugyanis ha igaz a nullhipotézis, akkor a teszt statisztika 1 szabadsági fokú χ^2 eloszlást követ.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(129-143)^2}{143} + \frac{(157-143)^2}{143} = \frac{14^2+14^2}{143} = \frac{392}{143} = 1,7413$$

$$\chi_1^2 = 2,71$$

Mivel a számított χ^2 értéke kisebb, mint a táblázatból kiolvasott χ_1^2 érték, ezért nincs okunk rá, hogy a megadott megbízatósági szinten szabálytalannak tekintsük az érmét.

5. Táblázatok

5.1. Φ táblázat

5.2. t táblázat

	50,00%	**75,00%**	**90,00%**	**95,00%**	**97,50%**	**99,00%**	**99,50%**	**99,90%**
1	1,0000	2,4142	6,3138	12,7062	25,4517	63,6567	127,3213	636,6192
2	0,8165	1,6036	2,9200	4,3027	6,2053	9,9248	14,0890	31,5991
3	0,7649	1,4226	2,3534	3,1824	4,1765	5,8409	7,4533	12,9240
4	0,7407	1,3444	2,1318	2,7764	3,4954	4,6041	5,5976	8,6103
5	0,7267	1,3009	2,0150	2,5706	3,1634	4,0321	4,7733	6,8688
6	0,7176	1,2733	1,9432	2,4469	2,9687	3,7074	4,3168	5,9588
7	0,7111	1,2543	1,8946	2,3646	2,8412	3,4995	4,0293	5,4079
8	0,7064	1,2403	1,8595	2,3060	2,7515	3,3554	3,8325	5,0413
9	0,7027	1,2297	1,8331	2,2622	2,6850	3,2498	3,6897	4,7809
10	0,6998	1,2213	1,8125	2,2281	2,6338	3,1693	3,5814	4,5869
11	0,6974	1,2145	1,7959	2,2010	2,5931	3,1058	3,4966	4,4370
12	0,6955	1,2089	1,7823	2,1788	2,5600	3,0545	3,4284	4,3178
13	0,6938	1,2041	1,7709	2,1604	2,5326	3,0123	3,3725	4,2208
14	0,6924	1,2001	1,7613	2,1448	2,5096	2,9768	3,3257	4,1405
15	0,6912	1,1967	1,7531	2,1314	2,4899	2,9467	3,2860	4,0728
16	0,6901	1,1937	1,7459	2,1199	2,4729	2,9208	3,2520	4,0150
17	0,6892	1,1910	1,7396	2,1098	2,4581	2,8982	3,2224	3,9651
18	0,6884	1,1887	1,7341	2,1009	2,4450	2,8784	3,1966	3,9216
19	0,6876	1,1866	1,7291	2,0930	2,4334	2,8609	3,1737	3,8834
20	0,6870	1,1848	1,7247	2,0860	2,4231	2,8453	3,1534	3,8495

5.3. *u* táblázat

	0,00	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,00	0,00	0,00	0,01	0,01	0,02	0,02	0,02	0,03	0,03	0,04
0,10	0,04	0,04	0,05	0,05	0,06	0,06	0,06	0,07	0,07	0,08
0,20	0,08	0,08	0,09	0,09	0,09	0,10	0,10	0,11	0,11	0,11
0,30	0,12	0,12	0,13	0,13	0,13	0,14	0,14	0,14	0,15	0,15
0,40	0,16	0,16	0,16	0,17	0,17	0,17	0,18	0,18	0,18	0,19
0,50	0,19	0,19	0,20	0,20	0,21	0,21	0,21	0,22	0,22	0,22
0,60	0,23	0,23	0,23	0,24	0,24	0,24	0,25	0,25	0,25	0,25
0,70	0,26	0,26	0,26	0,27	0,27	0,27	0,28	0,28	0,28	0,29
0,80	0,29	0,29	0,29	0,30	0,30	0,30	0,31	0,31	0,31	0,31
0,90	0,32	0,32	0,32	0,32	0,33	0,33	0,33	0,33	0,34	0,34
1,00	0,34	0,34	0,35	0,35	0,35	0,35	0,36	0,36	0,36	0,36
1,10	0,36	0,37	0,37	0,37	0,37	0,37	0,38	0,38	0,38	0,38
1,20	0,38	0,39	0,39	0,39	0,39	0,39	0,40	0,40	0,40	0,40
1,30	0,40	0,40	0,41	0,41	0,41	0,41	0,41	0,41	0,42	0,42
1,40	0,42	0,42	0,42	0,42	0,43	0,43	0,43	0,43	0,43	0,43
1,50	0,43	0,43	0,44	0,44	0,44	0,44	0,44	0,44	0,44	0,44
1,60	0,45	0,45	0,45	0,45	0,45	0,45	0,45	0,45	0,45	0,45
1,70	0,46	0,46	0,46	0,46	0,46	0,46	0,46	0,46	0,46	0,46
1,80	0,46	0,46	0,47	0,47	0,47	0,47	0,47	0,47	0,47	0,47
1,90	0,47	0,47	0,47	0,47	0,47	0,47	0,48	0,48	0,48	0,48
2,00	0,48	0,48	0,48	0,48	0,48	0,48	0,48	0,48	0,48	0,48
2,10	0,48	0,48	0,48	0,48	0,48	0,48	0,48	0,48	0,49	0,49
2,20	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49
2,30	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49
2,40	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49
2,50	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49	0,50	0,50

5.4. F táblázat

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	18,5128	19,0000	19,1643	19,2468	19,2964	19,3295	19,3532	19,3710	19,3848	19,3959
3	10,1280	9,5521	9,2766	9,1172	9,0135	8,9406	8,8867	8,8452	8,8123	8,7855
4	7,7086	6,9443	6,5914	6,3882	6,2561	6,1631	6,0942	6,0410	5,9988	5,9644
5	6,6079	5,7861	5,4095	5,1922	5,0503	4,9503	4,8759	4,8183	4,7725	4,7351
6	5,9874	5,1433	4,7571	4,5337	4,3874	4,2839	4,2067	4,1468	4,0990	4,0600
7	5,5914	4,7374	4,3468	4,1203	3,9715	3,8660	3,7870	3,7257	3,6767	3,6365
8	5,3177	4,4590	4,0662	3,8379	3,6875	3,5806	3,5005	3,4381	3,3881	3,3472
9	5,1174	4,2565	3,8625	3,6331	3,4817	3,3738	3,2927	3,2296	3,1789	3,1373
10	4,9646	4,1028	3,7083	3,4780	3,3258	3,2172	3,1355	3,0717	3,0204	2,9782
11	4,8443	3,9823	3,5874	3,3567	3,2039	3,0946	3,0123	2,9480	2,8962	2,8536
12	4,7472	3,8853	3,4903	3,2592	3,1059	2,9961	2,9134	2,8486	2,7964	2,7534
13	4,6672	3,8056	3,4105	3,1791	3,0254	2,9153	2,8321	2,7669	2,7144	2,6710
14	4,6001	3,7389	3,3439	3,1122	2,9582	2,8477	2,7642	2,6987	2,6458	2,6022
15	4,5431	3,6823	3,2874	3,0556	2,9013	2,7905	2,7066	2,6408	2,5876	2,5437

5.5. χ^2 táblázat

	50,00%	75,00%	90,00%	95,00%	97,50%	99,00%	99,50%	99,90%
1	0,4549	1,3233	2,7055	3,8415	5,0239	6,6349	7,8794	10,8276
2	1,3863	2,7726	4,6052	5,9915	7,3778	9,2103	10,5966	13,8155
3	2,3660	4,1083	6,2514	7,8147	9,3484	11,3449	12,8382	16,2662
4	3,3567	5,3853	7,7794	9,4877	11,1433	13,2767	14,8603	18,4668
5	4,3515	6,6257	9,2364	11,0705	12,8325	15,0863	16,7496	20,5150
6	5,3481	7,8408	10,6446	12,5916	14,4494	16,8119	18,5476	22,4577
7	6,3458	9,0371	12,0170	14,0671	16,0128	18,4753	20,2777	24,3219
8	7,3441	10,2189	13,3616	15,5073	17,5345	20,0902	21,9550	26,1245
9	8,3428	11,3888	14,6837	16,9190	19,0228	21,6660	23,5894	27,8772
10	9,3418	12,5489	15,9872	18,3070	20,4832	23,2093	25,1882	29,5883
11	10,3410	13,7007	17,2750	19,6751	21,9200	24,7250	26,7568	31,2641
12	11,3403	14,8454	18,5493	21,0261	23,3367	26,2170	28,2995	32,9095
13	12,3398	15,9839	19,8119	22,3620	24,7356	27,6882	29,8195	34,5282
14	13,3393	17,1169	21,0641	23,6848	26,1189	29,1412	31,3193	36,1233
15	14,3389	18,2451	22,3071	24,9958	27,4884	30,5779	32,8013	37,6973
16	15,3385	19,3689	23,5418	26,2962	28,8454	31,9999	34,2672	39,2524
17	16,3382	20,4887	24,7690	27,5871	30,1910	33,4087	35,7185	40,7902
18	17,3379	21,6049	25,9894	28,8693	31,5264	34,8053	37,1565	42,3124
19	18,3377	22,7178	27,2036	30,1435	32,8523	36,1909	38,5823	43,8202
20	19,3374	23,8277	28,4120	31,4104	34,1696	37,5662	39,9968	45,3147